Topologia

Lista 3 (wnętrze, domknięcie, pochodna, brzeg zbioru)

Zad 1. Wyznaczyć wnętrze, domknięcie, brzeg oraz pochodną danego podzbioru prostej euklidesowej $(\mathbb{R}, d_e)$:

$$A=\mathbb{N},\quad B=\mathbb{Z},\quad C=\mathbb{Q},\quad D=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\quad E=\mathbb{R},\quad F=(0,3],\quad G=(-\infty,5],$$

$$H=(1,2)\setminus\mathbb{Q},\quad I=[-3,3)\cup(5,+\infty),\quad J=\left\{x=2^{\frac{1}{n}}:n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{x:|x-4|<1\},$$

$$K=\left\{x=(-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right):n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{x:|x|>2\},\quad L=\left\{\frac{(-1)^n}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}\cup\Big([1,2]\cap\mathbb{Q}\Big).$$

Zad 2. Na płaszczyźnie euklidesowej $(\mathbb{R}^2, d_e)$ wyznaczyć wnętrze, domknięcie, brzeg oraz pochodną zbioru

$$A=[0,1]\times[0,1),\quad B=\left\{\left(\frac{1}{n},(-1)^n\right):n\in\mathbb{N}\right\},\quad C=\{(x,y):y=\sin\frac{1}{x},\ x>0\},$$

$$D=\{(x,y):x,y\in\mathbb{Q}\},\quad E=\left\{(x,y):y=\frac{1}{n}x,\ n\in\mathbb{N}\right\},\quad F=\{(x,y):y=qx,\ q\in\mathbb{Q}\},$$

$$G=\left\{(x,y):y^2+x^2=\left(1-\frac{1}{n}\right)^2,\ n\in\mathbb{N}\right\},\quad H=\{(x,y):x\in[1,2)\cap\mathbb{Q},\ y\in(1,2)\setminus\mathbb{Q}\}.$$

Zad 3. Sprawdzić, czy zbiór $\{tp+(t-1)q : t\in(0,1)\}\subset\mathbb{R}^2$, gdzie $p,q\in\mathbb{R}^2$, jest otwarty w metryce: a) euklidesowej, b) rzeka, c) studnia.

Zad 4. Sprawdzić, czy podzbiór M przestrzeni funkcji ciągłych $C[a,b]$, z metryką supremum, jest otwarty lub domknięty.

	$C[a,b]$	M		$C[a,b]$	M
a)	$C[-5,1]$	$\{x:x(0)=0\}$	c)	$C[0,1]$	$\{x:\int_0^1 x(t)dt=0\}$
b)	$C[-3,3]$	$\{x:x(0)=x(1)\}$	d)	$C[0,1]$	$\{x:\int_0^1 x(t)dt<1\}$

Zad 5. Wyznaczyć wszystkie zbiory otwarte i wszystkie zbiory domknięte w przestrzeni z metryką dyskretną.

Zad 6. Niech A będzie dowolnym zbiorem. Udowodnić, że jeśli zbiór G jest otwarty, to

a) $G\cap\overline{A}\subset\overline{G\cap A}$, b) $\overline{G\cap\overline{A}}=\overline{G\cap A}$, c) $\overline{G}=\overline{\operatorname{int}(\overline{G})}$.

Zad 7. n-tą pochodną $A^{(n)}$ zbioru A określamy indukcyjnie wzorami $A^{(1)}=A^d$, $A^{(n)}=(A^{(n-1)})^d$. Udowodnić że dla dowolnych dwóch zbiorów A i B w przestrzeni topologicznej X spełnione są następujące relacje

a) $A\subset B\Rightarrow A^d\subset B^d$, b) $(A\cup B)^d=A^d\cup B^d$, c) $(A\cap B)^d\subset A^d\cap B^d$,

d) $A^{(n+1)}\subset A^{(n)}$ (przy dodatkowym założeniu, że X jest $\mathcal{T}_1$-przestrzenią).

Zad 8. Skonstruować podzbiór prostej euklidesowej $\mathbb{R}$ posiadający n różnych pochodnych.

Zad 9. W dowolnej przestrzeni topologicznej X udowodnić następujące zależności

a) $A\cup\operatorname{Fr}(A)=\overline{A}$, b) $\operatorname{Fr}(A)=\overline{A}\cap\overline{X\setminus A}$, c) $\operatorname{Fr}(A)=\big(A\cap\overline{X\setminus A}\big)\cup\big(\overline{A}\setminus A\big)$,

d) $\operatorname{Fr}(A)\cup\operatorname{Fr}(B)=\operatorname{Fr}(A\cup B)\cup\operatorname{Fr}(A\cap B)\cup\big(\operatorname{Fr}(A)\cap\operatorname{Fr}(B)\big)$, e) $\operatorname{Fr}(\operatorname{int}(A))\subset\operatorname{Fr}(A)$,

f) $A=\overline{A}\iff\operatorname{Fr}(A)=A\cap\overline{X\setminus A}$, g) $A=\operatorname{int}(A)\iff\operatorname{Fr}(A)=A\cap\overline{X\setminus A}$,

h) A jest różnicą dwóch zbiorów domkniętych $\iff$ zbiór $\overline{A}\setminus A$ jest domklnięty.